

دورة الأوائل

الرياضيات المتقدمة · الصف الثاني عشر · الفصل الدراسي الأول



الوحدة الثالثة

مقدمة في النهايات والاتصال

١-٣ نهاية الدالة عند نقطة

٢-٣ نهاية الدالة عند اللانهاية

٣-٣ خواص النهايات

٤-٣ الاتصال

١-٣ كثيرة الحدود

٢-٣ الدالة النسبية

٣-٣ المعرفة بأكثر من قاعدة



اسم الطالب:

إعداد: د. صهيبي سليمان - الأول على السلطنة ·

math.sh3la.net

النهاية عند نقطة

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (نهايتان من الجهتين متساويتان)
- وجود النهاية عند $s = a$ لا يعني بالضرورة أن الدالة معرفة عند $s = a$.
- **كثيرة الحدود:** النهاية = التعويض المباشر: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- **الدالة النسبية:** عوض أولاً. إذا ظهر $\frac{0}{0}$: حلل البسط والمقام واختصر العامل المشترك ثم عوض. إذا ظهر $\frac{\text{عدد}}{0}$: النهاية غير موجودة (∞ أو $-\infty$).

الفجوة وخطوط التقارب

الفجوة: صفر المقام الذي يُختصر - إحداثيتها الصادي بالتعويض في الدالة بعد التبسيط

خط التقارب الرأسي: $s = a$ صفر المقام الذي لا يُختصر

خط التقارب الأفقي: $y = L$ حيث $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$

النهاية عند اللانهاية للدالة النسبية

- اقسم البسط والمقام على s مرفوعة لأعلى قوة في المقام. واستخدم: $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{a}{b}$ ، $a < b$ ، $a = b$ ، $a > b$

المقارنة بين أعلى قوة في البسط والمقام	النهاية عند $\pm\infty$
أعلى قوة في البسط = أعلى قوة في المقام	$\frac{\text{معامل أعلى قوة في البسط}}{\text{معامل أعلى قوة في المقام}}$
أعلى قوة في البسط > أعلى قوة في المقام	$\pm\infty$
أعلى قوة في البسط < أعلى قوة في المقام	غير موجودة

خواص النهايات (إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودتين)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

الاتصال

- الدالة متصلة عند $s = 1$ إذا وفقط إذا: (أ) موجودة (ب) نهاية (s) موجودة (ج) نهاية (s) موجودة (د) $(s) = 1$
- الدالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقاطها (لا فجوات، ولا قفزات، ولا خطوط تقارب رأسية).
- لإثبات عدم الاتصال على فترة: أوجد صفر المقام (حلل)، ثم بين أنه ينتمي للفترة، فالدالة غير معرفة عنده $\Rightarrow$ غير متصلة على الفترة.

القسم ١ الآلة الحاسبة في هذه الوحدة

كتاب الطالب - تمارين ٣-١٠-٣

السؤال: الدالة $f(s) = \frac{s^3 - s^2 - s + 5}{s - 1}$ ، أوجد قيمة $f(1.9999)$ ،

هـ (١.٩٩٩٩) وقيمة $f(1.9999)$ مقربة إلى أقرب ٤ منازل عشرية، ثم قدر نهاية $f(s)$ هـ (س).

تقدير نهاية بجدول: CALC

اضغط بالترتيب:

$$\text{Math } \Delta (X^3 - X^2 - 2X + 5) \div (X - 1)$$

5.00010004

$$(\text{ALPHA}) x^3 - (\text{ALPHA}) x^2 - 2 (\text{ALPHA}) + 5) \div (\text{ALPHA}) - 1) \rightarrow \text{CALC} 2 . 0 0 0 1 =$$

$\leftarrow$ أ = ٥.٠٠٠١ ، وأعد CALC ب ١.٩٩٩٩ فتحصل على ب = ٤.٩٩٩٩ $\Rightarrow$ النهاية هـ = ٥

٢٨/٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور ثاني ٠٨/٢٠٢٥

السؤال: د(س) = $\frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s^3 - s^2 - s + 1}$. أثبت أن نهاية $f(s)$ موجودة (حلل):

تحقق من نهاية $\frac{1}{f}$

اضغط بالترتيب:

$$\text{Math } \Delta (X^3 + X^2 + X + 1) \div (X^3 - X^2 - X + 1)$$

0.5000000013

$$(\text{ALPHA}) x^3 + (\text{ALPHA}) x^2 + (\text{ALPHA}) x + 1) \div (\text{ALPHA}) x^3 - (\text{ALPHA}) x^2 - (\text{ALPHA}) x + 1) \rightarrow \text{CALC} (-) 1 . 0 0 0 0 1 =$$

$\leftarrow$ قيمة قريبة جدًا من ٠.٥ $\Rightarrow$ إجابتك $\frac{1}{f}$ صحيحة (عوض بعدد قريب من -١، لا ب -١ نفسه)

٢٢/٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور أول ٠٨/٢٠٢٣

السؤال: النهاية $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 - 7s^2 + 13s - 5}{s^3 + 2s^2 - 5s + 1}$. أوجد قيمة $f(8)$ (حلل: ك = ٨).

نهاية عند اللانهاية

اضغط بالترتيب:

$$\text{Math } \Delta (8X^5 - 7X^3) \div (13 + 2X^5)$$

3.99999965

$$(8 \text{ ALPHA }) x^5 - 7 (\text{ALPHA}) x^3) \div (13 + 2 (\text{ALPHA}) x^5) \rightarrow \text{CALC} 1 0 0 0 =$$

$\leftarrow$ عوض بعدد كبير جدًا (١٠٠٠): الناتج يقترب من ٤ $\Rightarrow$ ك = ٨ صحيحة

٢٦/٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور أول ٠٨/٢٠٢٣

السؤال: د(س) = $\frac{s^3 - s^2 - s + 5}{s^3 + 2s^2 - 5s + 1}$. بين أن الدالة د(س) غير متصلة على الفترة $[0, 8]$

أصغار المقام: EQN

$s \geq 0$

اضغط بالترتيب:

$$\text{Math } \Delta aX^2 + bX + c = 0$$

X1=8 X2=2

$$\text{MODE } 5 3 \rightarrow 1 = (-) 1 0 = 1 6 = \rightarrow =$$

$\leftarrow$ المقام = ٠ عند $s = ٨$ ، $s = ٢$. والقيمة ٨ تقع داخل الفترة $[0, 8]$ $\Rightarrow$ د(س) غير معرفة عندها، إذن غير متصلة

1-3

كل جهة من قاعدتها أو من الرسم.

- قاعدة باستخدام خواص النهايات.

- قاعدة.

د

مثال ۱

لتكن د(س) = س^٢ - ٦س + ١١ . أنشئ جدول قيم لتبين أن $\lim_{s \rightarrow ٣} د(س) = ٣$

مثال ۲

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \text{الدالة د(س)}$$

- أ استخدم جدولين لتبيّن أن نها (س) غير موجودة.

ب اشرح، باستخدام الرموز، سبب عدم وجود نها (د.س).

ج اكتب معادلتى خطى التقارب الرأسى والأفقى.

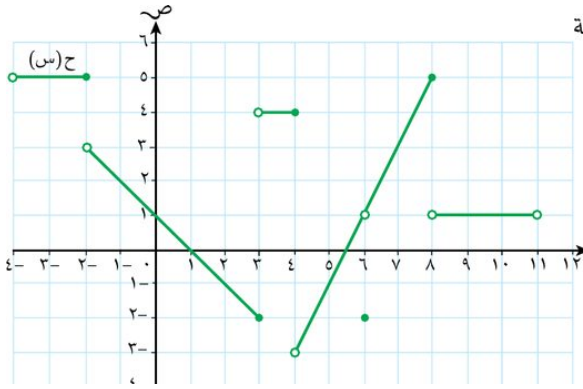
مثال ۳

$$\frac{1 - r_s}{1 - s} = \text{الدالة النسبية د(س)}$$

- أ** أوجد إحداثيات الفجوة الموجودة في منحنى الدالة

د(س).

٥ كتاب الطالب · تمرين ٣-١ ح سه



يبيّن الرسم منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة ح(س) في

المجال $II > -\infty > s$

- أوجد مدى الدالة في المجال المعطى.
- استخدم المنحنى لإيجاد قيمة ح(٢-), ح(٣)
- إذا كانت $II > -\infty > s$, نها ح(س) غير موجودة, فأوجد قائمة بجميع قيم ك الممكنة.
- أوجد قيمة ل, حيث ح(ل), نها ح(س) كلاهما موجودتان, ولكن غير متساويتين.

٢-٣ نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية (س ← ±∞)

٢-٣

الفكرة ببساطة

عندما يكبر س جدًا تتحكم أعلى قوة في البسط والمقام في الدالة. اقسم على س بأعلى قوة في المقام فتصبح باقي الحدود أصفًا. وإذا كانت النهاية عددًا ل فالمستقيم ص = ل خط تقارب أفقي.

أهداف التعلم (دليل المعلم)

- يفهم ويحدد باستخدام جداول القيم, وجبريًا, وبيانيًا مفهوم نهاية الدالة د(س) عند اللانهاية للدالة النسبية.

ماذا سنتعلم؟

- حساب النهاية عند ±∞ جبريًا وجدول القيم.
- المقارنة السريعة بين أعلى قوة في البسط والمقام.
- خط التقارب الأفقي, وإيجاد ثوابت مجهولة من قيمة النهاية.

أمثلة الشرح

مثال ٨ كتاب الطالب · ص ١١٦

أوجد كلاً مما يأتي:

- نها $\frac{2s+9}{s^3-5}$ نها $\frac{4s^3+3}{s^3+1}$ نها $\frac{12s^4}{s^7-1}$ نها $\frac{1}{s-1}$

مثال ٩ كتاب الطالب · ص ١١٨

- أوجد نهاية كل دالة عندما $s \leftarrow \infty$: (١) د(س) $\frac{1-s^2}{s^3+7}$ ه(س) $\frac{s^3+5}{s^3+7}$
- أوجد نهاية كل دالة عندما $s \leftarrow -\infty$: (١) ق(س) $\frac{s^3-5}{s^3+4}$ ر(س) $\frac{s^3-5}{s^3+4}$ م(س) $\frac{s^3-5}{s^3+4}$

مثال ١٠ كتاب الطالب - ص ١١٩

الدالة د(س) = $\frac{١ - ٥س}{٢ + ٦س}$. أوجد معادلة كلٍّ من: (١) خط التقارب الرأسي (٢) خط التقارب الأفقي.

تمارين

١ كتاب الطالب - تمارين ٢-٣ س ١

أوجد نهاية كل دالة من الدوال الآتية عند س $\leftarrow \infty$:

ب د(س) = $\frac{٩ + ٢س}{٥س - ١}$

د د(س) = $\frac{٧س}{٣س - ٥}$

أ د(س) = $\frac{١ + ٥س - ٤س}{٢س}$

ج د(س) = $\frac{٥ + ٣س - ٢س}{٣س - ٢س}$

٢ كتاب الطالب - تمارين ٢-٣ س ٣

إذا علمت أن س $\leftarrow \infty$ نها $\frac{١٠٠س - ٧س}{٢(٣ - ١س) + ٥}$ ، فأوجد قيم أ.

٣-٣ خواص النهايات

الفكرة ببساطة

إذا عرفت نهاية كل دالة وحدها، تستطيع حساب نهاية مجموعها وفرقها وحاصل ضربها وقسمتها وقوتها بالتعويض بالنهايات مباشرة - بشرط أن تكون النهايات موجودة، وأن نهاية المقام ليست صفرًا.

أهداف التعلم (دليل المعلم)

- يتذكر ويطبق خواص النهايات.

ماذا سنتعلم؟

- تطبيق خواص النهايات السبع.
- إيجاد نهاية دالة مجهولة من نهاية عبارة فيها.
- استخدام الرسم مع الخواص.

أمثلة الشرح

مثال ١١ كتاب الطالب - ص ١٢٣

إذا علمت أن س $\leftarrow \infty$ نها د(س) = ٢ ، س $\leftarrow \infty$ نها ع(س) = ٨ ، فاستخدم خواص النهايات لإيجاد كلٍّ من:

أ نها د(س) - س $\leftarrow \infty$

ب نها ع(س) س $\leftarrow \infty$

ج نها ع(س) س $\leftarrow \infty$

د نها ع(س) س $\leftarrow \infty$

تعارین

1

أ. نهأ (ه(س) + ك(س)) ب. نهأ (ه(س) × ك(س)) ج. نهأ (ه(س))^٣

2

3

Σ

Ε-Π

- يحدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة أو على فترة مغلقة.

- شروط الاتصال الثلاثة عند نقطة.
- الاتصال على فترة مغلقة.
- إيجاد نقاط عدم الاتصال، وإيجاد ثوابت تجعل الدالة غير متصلة.

کتاب ال

1

يُبين أن الدالة $D(s) = \frac{s+1}{s-1}$ متصلة على الفترة $s \geq 0$ ، وغير متصلة على الفترة $s \geq 1$.

$$\frac{1}{r_s - r_0} = \text{لتكن الدالة د(س)}$$

منحنى الدالة ك(س) = $\frac{1}{s} + f$ له خط تقارب رأسي عند $s = \frac{0}{r}$ ، ويمر بالنقطة (٢، -١). أوجد قيمة كل من ت، ف التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

١

٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور أول ٣ س

في الدالتين د(س)، ه(س) يكون: $\frac{نها}{س} = ٢$ ، $\frac{نها}{س} = ٦$ (ه(س) - ٢ د(س)) [٤]

← نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلها بنفس الطريقة:

أ-١ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور ثاني ١٤ س

إذا كانت $\frac{نها}{س} = ٣$ ، $\frac{نها}{س} = ٨$ ، فأوجد $\frac{نها}{س}$ (٣ م(س) - ن(س)) [٣]

ب-١ ٢٠٢٤/٢٠٢٥ دور أول ٥ س

$\frac{نها}{س} = ٣$ ، $\frac{نها}{س} = ١٥$ ، أوجد $\frac{نها}{س}$ (ل(س) × ه(س) + ٢ س) [٤]

ج-١ ٢٠٢٤/٢٠٢٥ دور ثاني ٥ س

$\frac{نها}{س} = ٦$ ، $\frac{نها}{س} = ٧$ ه(س) = ٢١، أوجد $\frac{نها}{س}$ (ل(س) + ه(س)) [٤]

د-١ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور أول ٧ س

$\frac{نها}{س} = ١٥$ ، $\frac{نها}{س} = ٣$ ، أوجد $\frac{نها}{س}$ (٨ ك(س) - $\frac{١}{٣}$ ع(س)) [٣]

ه-١ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور ثاني ٧ س

$\frac{نها}{س} = ٨$ ، أوجد قيمة $\frac{نها}{س}$ (س × د(س) + ٢ د(س)) [٣]

و-١ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور أول ١٤ س

في الدالتين د(س)، ع(س) يكون $\frac{نها}{س} = ١٥$ ، $\frac{نها}{س} = ٣$ ، و $\frac{نها}{س}$ ع(س) موجودة. أوجد $\frac{نها}{س}$ ع(س) [٣]

٢

٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور أول ١٩ س

ه(س) دالة متصلة عند س = ٢، $\frac{نها}{س} = ٢$ ه(س) + ٤ = ٥. ظلل الشكل المقترن بالنقطة التي يمر بها منحنى الدالة

ه(س) [١]

(٥، ٢) ☐

(٤، ٢) ☐

(٩، ٢) ☐

(١، ٢) ☐

↪ **نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:**

۱-۲ ۲۰۲۵/۲۰۲۶ دور ثاني • س ۱۹

ل(س) دالة متصلة، ومنحنى الدالة ل(س) يمر بالنقطة (١، ٢). ظلّل الشكل المقترن بقيمة s_{i+1} نها (٦ + ٣ ل(س)) [١]

10

9 ☐

17 ☐

۳ ۲۰۲۳/۲۰۲۴ · دور اول · س ۴

الدالة د(س) = $\frac{س - \epsilon - 1}{س + 3}$. (ظَلَّل الشكل المقترن بقيمة س التي تكون عندها الدالة غير متصلة) [1]

1. -

μ_-

30

1.

↪ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

١-٣ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور ثاني • س ٤

الدالة د(س) = $\frac{f(s) + \lambda g(s)}{s + \varepsilon}$. (ظلل الشكل المقترن بقيمة س التي تكون عندها الدالة غير متصلة) [1]

 $\Lambda - \bigcirc$

ε-

ε

Λ O

۳-ب ۲۰۲۴/۲۰۲۵ · دور ثانی · س ۱۱

د(س) = $\frac{س + س - ٤٢}{س - ١}$. أوجد قيمة س عندما تكون د(س) غير معرّفة. [٢]

4 ۲۰۲۴/۲۰۲۵ • دور اول • س ۱۱

أوجد إحداثيات الفجوة الموجودة في المنحنى د(س) = $\frac{r_1 s^2 + r_2 s}{s^3 + s}$ [٢]

0 ۲۰۲۴/۲۰۲۵ · دور اول · س.۱۰

ل(س) = $\frac{7 + 5s}{7 - s}$. (ظلل الشكل المقترن بمعادلة خط التقارب الرأسي) [١]

$$\frac{V}{I} = R$$
$$\frac{V}{I_0} = 100 \text{ } \square$$
$$\frac{V}{I} = R$$
$$\frac{V}{I_0} = \text{ص } \square$$

↪ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور أول · س ٢٠

د(س) = $\frac{\text{النسبة} + \epsilon}{\text{النسبة} + 3}$. (ظلل الشكل المقترن بمعادلة خط التقارب الرأسي لـ د(س)) [١]

$$\xi_- = \eta \quad \square$$
$$\frac{1}{\varepsilon} = \text{مس } \bigcirc$$
$$\frac{1}{\varepsilon} - =_{\mathcal{U}} \Box$$
$$\xi = \eta \circ \varphi$$

1 ٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور اول · س ١١

$$D(s) = \frac{s^2(s+2)}{s^2(s+1)} \text{ . أوجد معادلة خط التقارب الأفقي لـ } D(s) \text{ [3]}$$

↪ **نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:**

٦-١ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور ثاني • س ١١

$$\frac{س(س+٤)}{س^٣+٥س} = د(س) \text{ . أوجد معادلة خط التقارب الأفقي لـ } د(س) \text{ [٣]}$$

1-ب ۲۰۲۴/۲۰۲۵ · دور ثانی · س ۱۰

$$L(s) = \frac{s^3 - \lambda}{s^2 - \tau} \text{ . (ظلل الشكل المقترن بمعادلة خط التقارب الأفقي) [1]}$$

☐ ص = ٣
 ☐ ص = ٣-
 ☐ س = ٢
 ☐ س = ٢-

1-ج ۲۰۲۴/۲۰۲۵ دور ثانی • س ۴

(ظلل الشكل المقترن بقيمة $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 + s^2 - 4s}{4s^3}$) [1]

$$1 \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r} \quad 1$$

V ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · ص ٢٢

نها $\epsilon = \frac{ك س - ٧ س}{١٣ س + ٢ س}$. أوجد قيمة ك [٥]

↪ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٢٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثانی · س ٢٢

نها $\epsilon = \frac{16s^2 - 7s}{9 - 4s}$. أوجد قيمة ϵ [5]

۷-ب ۲۰۲۴/۲۰۲۵ · دور اول · س ۴

نها $\frac{1 - s + s^3}{s^3}$. (ظّل الشكل المقترن بقيمة أ) [١]

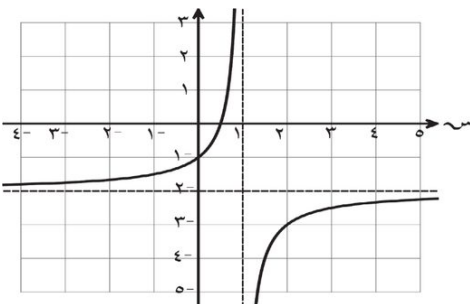
$$1 \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r} - 1 \quad 1 -$$

۲۰۲۵/۲۰۲۶ · دور ثانی · س ۲۰

نها $\frac{n \text{ س}^7 + 8 \text{ س}}{(1 - 8 \text{ س}^7)}$ = $\frac{3}{2}$. (ظلل الشكل المقترن بقيمة ن) [١]

☐ 10 ☒ 30 ☐ 50 ☐ 70

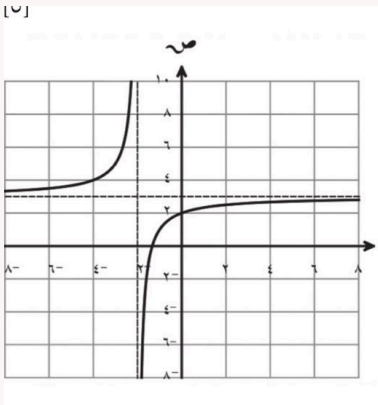
٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س ٥



يبين الرسم الآتي جزءًا من منحنى الدالة $D(s) = \frac{s - 1}{s + 1}$ ، يوجد للمنحنى خط تقارب رأسي عند $s = 1$ ، وخط تقارب أفقي عند $s = -1$. أوجد قيمتي a ، b [٤]

↪ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٨-أ ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور ثاني · س٥٢



الرسم المجاور يبين جزءًا من منحنى الدالة $E(s) = \frac{s + \epsilon}{s + \tau}$ ، يوجد للمنحنى خط تقارب رأسي عند $s = -\tau$ ، وخط تقارب أفقي عند $s = \epsilon$. أوجد قيمتي τ ، ϵ

۹ ۲۰۲۳/۲۰۲۴ · دور اول · س ۲۲

الدالة د(س) = $s - \frac{1}{n+s}$. يبين أن الدالة د(س) غير متصلة على الفترة $0 \leq s \leq 1$ [٣]

↪ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٩-أ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س٦٦

الدالة د(س) = $\frac{1}{s} + s - \varepsilon$. **يُتَبَيَّن** أن الدالة د(س) غير متصلة على الفترة $1 \leq s \leq 8$ [٣]

۹-ب ۲۰۲۴/۲۰۲۵ · دور اول · س ۲۸

الدالة د(س) = $\frac{3}{2} s + \frac{3}{2} s - 1$. **بَيِّنْ** أَنَّ الدالة د(س) غير متصلة على الفترة $2 \leq s \leq 9$ [3]

۶-ج ۲۰۲۴/۲۰۲۵ • دور ثاني • س ۲۸

الدالة د(س) = $\frac{1}{r_E - r_{D-S}} + r_{S-S}$. بيّن أن الدالة د(س) غير متصلة على الفترة $1 \leq s \leq 3$

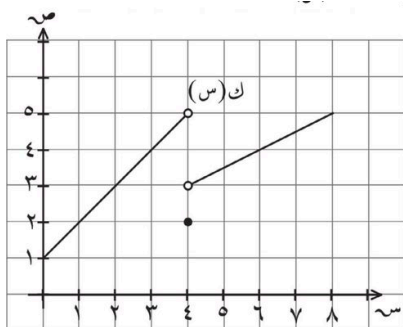
۹-د ۲۰۲۵/۲۰۲۶ دور ثاني ۰ س ۲۵

د(س) = $\frac{s_3 + s_6}{s_1 + s_3}$. **بيّن أن الدالة د(س) غير متصلة على الفترة $[-2, 6]$**

من الشكل الآتي بيان الدالة ك(س). (ظّل الشكل المقترن بقيمة نها س ← ٤

ك(س) [١]

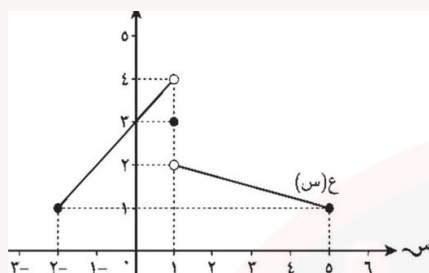
٢ ☐ ٣ ☐ ٥ ☐ غير موجودة ☐



← نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

١-أ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور ثاني - س٣

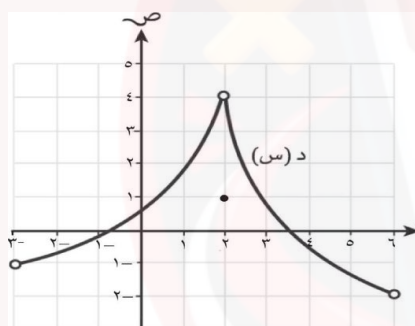
الشكل الآتي يمثل بيان الدالة ع(س). أوجد نها س ← ١ ع(س) [٤]



١-ب ٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور ثاني - س١١

الشكل الآتي يمثل منحنى الدالة د(س) المعرفة في المجال $-3 < x < 6$. (ظّل الشكل المقترن بقيمة نها س ← ٢ د(س) [١]

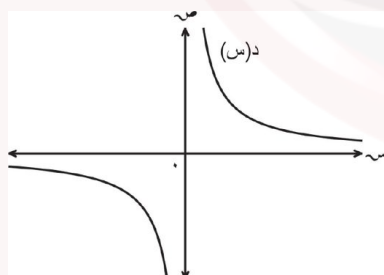
١ ☐ ٤ ☐ ٣ ☐ غير موجودة ☐



١-ج ٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور أول - س١

يمثل الشكل الآتي بيان الدالة د(س). (ظّل الشكل المقترن بقيمة نها س ← ١ د(س) [١]

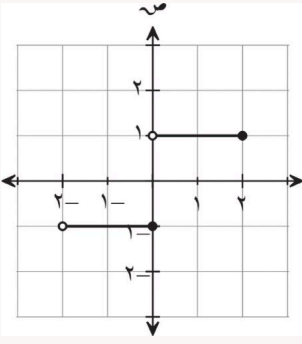
∞ ☐ ∞ ☐ صفر ☐ غير موجودة ☐



د-١٠ ٢٠٢٥/٢٠٢٣ دور ثاني - س ٦

الشكل الآتي يمثل جزءًا من بيان الدالة د(س). (ظلل الشكل المقترن بقيمة نها س ← + د(س)) [١]

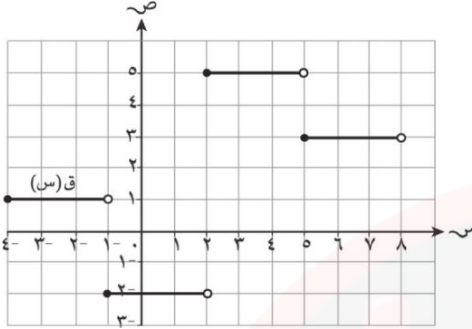
١- ☐ ١ ☐ صفر ☐ غير موجودة



١١ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور أول - س ١٨

يبين الرسم الآتي بيان الدالة ق(س). (ظلل الشكل المقترن بقيمة نها س ← - ق(س))

١- ☐ ١ ☐ ٣ ☐ ٤ ☐ ٦

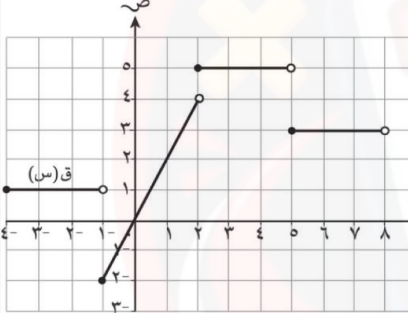


٨ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

أ-١١ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ دور ثاني - س ١٨

يبين الرسم البياني الآتي جزءًا من منحنى الدالة ق(س). (ظلل الشكل المقترن بقيمة نها س ← - ق(س)) [١]

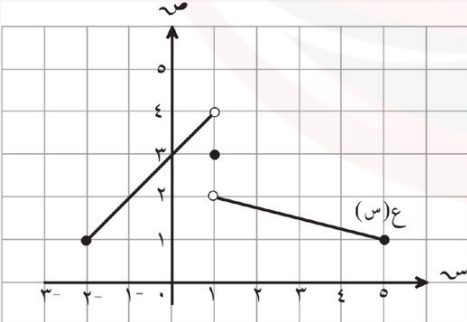
١- ☐ ٢- ☐ ١- ☐ صفر ☐ ١



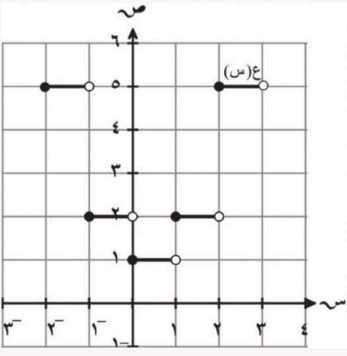
أ-١٢ ٢٠٢٤/٢٠٢٥ دور أول - س ٢٠

يبين الرسم الآتي جزءًا من منحنى الدالة ع(س) المعرفة بأكثر من قاعدة. (ظلل الشكل المقترن بناتج ع(١) + نها س ← - ع(س)) [١]

٣- ☐ ٥ ☐ ٦ ☐ ٧



١١-ج ٢٠٢٤/٢٠٢٥ دور ثاني ٠ س٠٢



يبيّن الرسم المجاور منحنى الدالة $f(x)$ المعرفة بأكثر من قاعدة في المجال $-2 \leq x$ كثر
 $3 \geq$. ظلّل الشكل المقترن بقيمة $f(-2)$ - نها $f(x)$ ع (س) (([1])

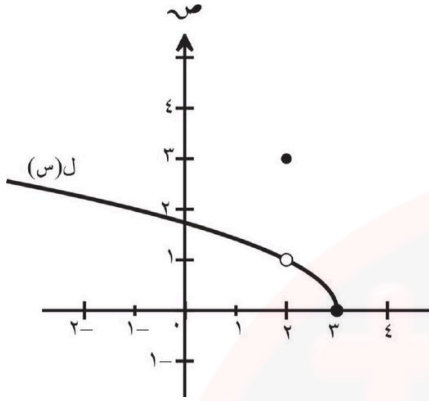
☐ ٥

☐ ٣

☐ ٢

☐ ١

١٢ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور أول ٠ س٠٥



يبين الشكل الآتي منحنى الدالة $f(x)$. ابحث اتصال الدالة $f(x)$ عند $x = 2$ [٤]

١٣ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور أول ٠ س٠٨

أ قدرات عليا

نها $f(x) = \frac{(2f(x) - (1 - x) + 4x)}{1 - x}$. أوجد قيمتي f ، x [٣]

١٤ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ دور ثاني ٠ س٠٨

أ قدرات عليا

د(س) = $\frac{1 + x + x^2}{1 - x - x^2}$. أثبت أن نها $f(x)$ د(س) موجودة. [٣]

خلاصة الوحدة: انتبه لهذه الأخطاء

من الامتحانات الوزارية



هذه الوحدة جاءت بـ ١٨ درجة من ٧٠ في ٢٠٢٤، و ١٦ درجة في ٢٠٢٥ و ٢٠٢٦ (٧ أسئلة كل امتحان). أسئلتها قصيرة ومتكررة – انتبه لهذه النقاط:

(٢) القيمة ليست النهاية

النقطة المغلقة تعطي قيمة الدالة، والنهاية من اتجاه المنحنى:
ع (١) = ٣ بينما $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = ٤$.
٢٠٢٥ أول س. ٢٠٢٦ أول س. ٢٥

(١) اقرأ اتجاه السهم

في $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ نقرأ من اليمين. السؤال جمع $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ٥$ مع
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ٢$ فالجواب ٣ لا ٦.
٢٠٢٤ أول س. ١٨

(٤) فجوة أم خط تقارب؟

إذا اختُصر العامل فهي فجوة (عوض في الدالة المبسطة لتجد ص). وإذا بقي في المقام فهو خط تقارب رأسي.
٢٠٢٥ أول س. ١١ ٢٠٢٥ ثاني س. ١١

(٣) غير متصلة على فترة

حلل المقام، ثم اكتب صراحة أن الصفر ينتمي للفترة وأن الدالة غير معرّفة عنده. هذا السؤال جاء في كل امتحان تقريبًا.
٢٠٢٤ ٢٠٢٥ س. ٢٨ ٢٠٢٦ ثاني س. ٢٥

(٦) أعلى قوة

إذا كان المقام مرفوعًا لقوة مثل (١ - ٢س)³ فأعلى قوة فيه ٦ ومعاملها (٢-)³ = ٤.
٢٠٢٦ ثاني س. ٢٠

(٥) س = أم ص = ؟

الرأسي يُكتب س = ... (من المقام)، والأفقي ص = ... (من النهاية عند ∞). خيارات الاختيار من متعدد تخط بينهما.
٢٠٢٥ س. ١٠ ٢٠٢٦ أول س. ٢٥

(٨) خواص النهايات

إذا أعطاك $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ٣$ هـ (س) = ١٥ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ٥$ هـ (س) = ٥ ولا تنس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ٤$.
٢٠٢٥ أول س. ٢٥

(٧) النهاية غير موجودة

إذا اختلفت النهايتان من الجهتين (حتى لو كانت إحدهما ∞ والأخرى -∞) فالنهاية غير موجودة – لا تختار ∞.
٢٠٢٦ أول س. ١١ ٢٠٢٤ س. ١١

(١٠) القدرات العليا

إذا ظهر ÷ فالعدد جذر للبسط والمقام: حلل بالتجميع. وفي النهاية عند ∞ بثوابت مجهولة: اشترط أن معامل س = ٠ حتى تكون النهاية عددًا.
٢٠٢٦ أول س. ٢٨ ٢٠٢٦ ثاني س. ٢٨

(٩) الاتصال يعني التعويض

إذا كانت الدالة متصلة عند أ فإن $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A)$ (د) = (أ) - استخدمها لإيجاد نقطة على المنحنى.
٢٠٢٦ س. ١٩

افهم هذه العشر، وخذ درجة الوحدة كاملة ١٠٠



أسئلة القدرات العليا

منهاج كامبريدج 9709 لا يتضمن النهايات والاتصال، لذلك أخذنا أسئلة هذه الوحدة من كتاب الجامعات الأمريكية OpenStax Calculus Volume 1 (جامعة رايس)، ومفاتيحها من مفتاح الإجابة الرسمي في الكتاب.

OpenStax Calculus Vol. 1 · تمرين ٩٧ 

أوجد $\frac{9-t}{\sqrt{3-t}}$ نها $t \leftarrow 9$

OpenStax Calculus Vol. 1 · تمرين ١٠١ ٢

$$\frac{2s^2 + s^3 - 2}{s^2 - 1} \quad \text{نها}$$

OpenStax Calculus Vol. 1 · تمرين ١٠٣ و ١٠٥ ٣

أوجد كلاً مما يأتي:

i) $\frac{2s^2 + 7s - 6}{s^2 + s - 2} \div \frac{2s^2 + 7s - 6}{s^2 + s - 2}$ **ب** $\frac{2s^2 + 7s - 6}{s^2 + s - 2} \div \frac{2s^2 + 7s - 6}{s^2 + s - 2}$

OpenStax Calculus Vol. 1 · تمرين ١٤٥ ٤

أوجد قيمة K التي تجعل الدالة $D(s)$ متصلة على الفترة المعطاة: $D(s) = \{s^3 + s^2, s > K; s^2 - s, s \leq K\}$

OpenStax Calculus Vol. 1 · تمرين ۱۴۷ 0

أوجد قيمة ك التي تجعل الدالة متصلة: د(س) = $\left\{ \frac{s^3 + s}{s}, s \neq 0; \text{ك}, s = 0 \right\}$

OpenStax Calculus Vol. 1 • تمرين ١٥٥ **1**

لتكن $D(s) = \{s^3, s, 1\}$; $s < 1$; $s^3, s > 1$

أ ارسـم منحنى الدالة د.

ب هل يمكن إيجاد قيمة k بحيث $(a) = k$ تجعل $d(s)$ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؟ فسّر إجابتك باختصار.

مفاتيح الإجابة

الدرس ١-٣ نهاية الدالة عند نقطة

مثال ١ الجدولان: من اليمين ومن اليسار تقترب (س) من ٣

مثال ٢ (ب) $\lim_{s \rightarrow 3^-} f(s) = \infty$ ، $\lim_{s \rightarrow 3^+} f(s) = -\infty$ (س) = ∞
(ج) $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 0$ ، $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 0$ ص

مثال ٣ (أ) $(2, 1)$ (ب) $\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = 2$ (س) = ٢

١ ٢-

٣ (أ) $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s) = 4$ ، $\lim_{s \rightarrow 2^+} f(s) = 8$ (ب) $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 2$ ، $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 2$ (ج) $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 2$ ، $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 2$ (د) $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 2$ ، $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 2$

٥ (أ) $\lim_{s \rightarrow 3^-} f(s) = 5$ ، $\lim_{s \rightarrow 3^+} f(s) = 5$ (ب) $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 5$ ، $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 5$ (ج) $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 5$ ، $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 5$ (د) $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 5$ ، $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 5$

الدرس ٢-٣ نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية

مثال ٨ (أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{4}{3}$ (ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{4}{3}$ (ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{4}{3}$ (د) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{4}{3}$

مثال ٩ (أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ (ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ (ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ (د) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$

١ (أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ ، $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ (ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ ، $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ (ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ ، $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ (د) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ ، $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$

مثال ١٠ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{1}{3}$ ، $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{1}{3}$ ص

٢ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$ أو $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2$

الدرس ٣-٣ خواص النهايات

١ (أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 8$ (ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 8$ (ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 8$ (د) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 8$

٣ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{5}{9}$

مثال ١١ (أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 4$ (ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 4$ (ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 4$ (د) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 4$

٢ ٩-

٤ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 12$ ، $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 12$ ف = ٦

الدرس ٤-٣ الاتصال

٢ غير متصلة عند $s = 8$ فقط، وهي تقع في الفترة الثانية لا الأولى

٤ $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 5$ ، $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 5$ ف = ٥

١ (أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 4$ ، $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 4$ (س) = ٤ (د) = ٤

٣ (أ) غير معزقة عند $s = 10$ (ب) $\lim_{s \rightarrow 10} f(s) = 2$ (س) = ٢

الأسئلة الوزارية

١-أ ١٤-

١-ج ٦

١-هـ ٤

٢ (١، ٢)

٣ ٣-

٣-ب $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 6$

٥ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{7}{1}$

٦ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{9}{2}$ ص

٦-ب $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 3$ ص

٧ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 8$ ك

٧-ب ٦

١ ١٠

١-ب ١٩

١-د ١٩

١-و ٥

٢-أ ١٢

٣-أ ٤-

٤ (٦، ٣-)

٥-أ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{1}{6}$ ص

٦-أ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \frac{1}{3}$ ص

٦-ج ١-

٧-أ $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 2 \pm$

٨	أ = ٤ ، ب = ٢	٧-ج	٦
٩	المقام = (س - ٢)(س - ٨) ، س = ٨ الفترة والدالة غير معرّفة عندها $\Leftrightarrow$ غير متصلة	٨-أ	أ = ٣ ، ب = ١
٩-ب	المقام = (س + ٧)(س - ٤) ، س = ٤ الفترة $\Leftrightarrow$ غير متصلة	٩-أ	المقام = (س + ٨)(س - ٥) ، س = ٥ الفترة $\Leftrightarrow$ غير متصلة
٩-د	المقام = (س - ٢)(س - ٤) ، س = ٢ ، ٤ الفترة $\Leftrightarrow$ غير متصلة	٩-ج	المقام = (س + ٨)(س - ٣) ، س = ٣ الفترة $\Leftrightarrow$ غير متصلة
١٠-أ	غير موجودة (س) $\neq$ ٢ ، نها $\neq$ ٢ (س) $\neq$ ٢	١٠	غير موجودة
١٠-ج	غير موجودة	١٠-ب	٤
١١	٣	١٠-د	١
١١-ب	٧	١١-أ	صفر
١٢	ل (س) = ٣ ، نها $\neq$ ٣ ل (س) $\neq$ ٣ $\Leftrightarrow$ غير متصلة عند س = ٣	١١-ج	٣
١٤	نها $\neq$ ٣ (س) $\neq$ ٣ ، نها $\neq$ ٣ (س) $\neq$ ٣ $\Leftrightarrow$ موجودة	١٣	ف = ٢ ، ن = ١

الملحق — أسئلة القدرات العليا

٢	$\frac{٥}{٢}$	١	٦
٤	ك = ٥	٣	أ) ∞ ، ب) ∞
٦	ب) لا يمكن، لأن عدم الاتصال قفزة: نها $\neq$ ٣ (س) $\neq$ ٣ ، نها $\neq$ ٣ (س) $\neq$ ٣	٥	ك = ١

التاريخ

ملاحظات الختامية

الوحدة الثالثة: مقدمة في النهايات والاتصال - اكتب ما تعلمته، وما تريد أن تسأل عنه د. صهيبي.



لا تنس!

ملاحظاتي

✓ / □

✓ مهماتي

المهمة	أنجزت	لم أنجز
حل أمثلة الدروس	☐	☐
حل تمارين الكتاب المختارة	☐	☐
حل الأسئلة الوزارية (٤٢ سؤالاً)	☐	☐
قراءة خلاصة الأخطاء الشائعة	☐	☐
حل أسئلة القدرات العليا	☐	☐
إتقان خطوات الآلة الحاسبة	☐	☐
مراجعة أخطائي من المفتاح	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐

مستوى إتقاني للوحدة

