دورة الأوائل

الرياضيات المتقدمة · الصف الثاني عشر · الفصل الدراسي الأول

الوحدة الرابعة

التفاضل

٤-١ المشتقة وعلاقتها بالميل	٤-٢ مشتقة دالة القوة
٤-٣ قاعدة السلسلة	٤-٤ المماس والعمودي
٤-٥ الدوال المتزايدة والمتناقصة	٤-٦ النقاط الحرجة

اسم الطالب: ----------

إعداد: د. صهيب سليمان – الأول على السلطنة ·
math.sh3la.net

القوانين والآلة الحاسبة

قواعد الاشتقاق

$\frac{ء}{ء س}(س^ن) = ن\, س^{ن-١}$	$\frac{ء}{ء س}(جـ) = ٠$	$\frac{ء}{ء س}(ك\, د(س)) = ك\, د'(س)$	$\frac{ء}{ء س}(د \pm ع) = د' \pm ع'$

قاعدة السلسلة: $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$

$\frac{ء}{ء س}(د(س))^ن = ن\,(د(س))^{ن-١} \times د'(س)$

$(هـ \circ د)'(س) = هـ'(د(س)) \times د'(س)$

- **قبل الاشتقاق:** اكتب $\sqrt[ن]{س^م} = س^{\frac{م}{ن}}$، $\frac{١}{س^ن} = س^{-ن}$، وفُكّ الأقواس واقسم الكسر على المقام إذا كان المقام حدًّا واحدًا.
- **المشتقة الثانية:** $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = \frac{ء}{ء س}(\frac{ء ص}{ء س})$ وتُكتب أيضًا $د''(س)$.

المماس والعمودي عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$

ميل المماس $م = \frac{ء ص}{ء س}$ عند $س = س_١$	المماس: $ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$	ميل العمودي $= -\frac{١}{م}$

العمودي: $ص - ص_١ = -\frac{١}{م}(س - س_١)$

- إذا كان $م = ٠$ ⇐ المماس أفقي $(ص = ص_١)$ والعمودي رأسي $(س = س_١)$.
- المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه، والمتعامدان حاصل ضرب ميليهما $= -١$.
- نقطة التقاطع مع محور الصادات: $س = ٠$، ومع محور السينات: $ص = ٠$.

التزايد والتناقص والنقاط الحرجة

$\frac{ء ص}{ء س}$	< ٠	> ٠	$= ٠$
الدالة	متزايدة	متناقصة	نقطة حرجة

اختبار المشتقة الثانية: $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} < ٠ \Leftarrow$ عظمى · $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} > ٠ \Leftarrow$ صغرى · $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = ٠ \Leftarrow$ استخدم اختبار المشتقة الأولى

اختبار المشتقة الأولى: إشارة $\frac{ء ص}{ء س}$ قبل وبعد النقطة: (+ ثم −) عظمى · (− ثم +) صغرى · (لا تتغير) انعطاف

- لإيجاد مجال التزايد: حل المتباينة $\frac{ء ص}{ء س} > ٠$ (ارسم قطع المشتقة أو جدول الإشارات).
- لإيجاد النقطة الحرجة: حل $\frac{ء ص}{ء س} = ٠$ لتجد س، ثم **عوّض في الدالة الأصلية** لتجد ص.

القسم ١ الآلة الحاسبة في هذه الوحدة

قيمة المشتقة: d/dx

السؤال: ص = ٤س^{٥} + ٢س^{٣} − س − ١ . (ظلّل الشكل المقترن بقيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = −١): −٢٧ ، −٦ ، ٤ ، ٢٥

٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س٥

اضغط بالترتيب:

SHIFT ∫□ 4 ALPHA) x■ 5 ▶ + 2 ALPHA) x^3 - ALPHA) - 1 ▶ (-) 1 =

Math ▲
d/dx(4X⁵+2X³−X−1)|x=−1
25

← الآلة تحسب ميل المماس مباشرة: الجواب ٢٥ (زر d/dx هو SHIFT ثم ∫□)

تحقّق من مشتقتك

السؤال: ع(س) = (هـ ∘ د)(س) ، د(س) = ٢س + ١ ، هـ(س) = ٣$\sqrt{\text{س}}$. أوجد ع′(س) (حلّك: $\frac{٣}{\sqrt{٢\text{س} + ١}}$ ، تحقق عند س = ٤)

٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س١٣

اضغط بالترتيب:

SHIFT ∫□ 3 √ 2 ALPHA) + 1 ▶ ▶ 4 = → 3 ÷ √ 9 =

Math ▲
d/dx(3√(2X+1))|x=4
1

← الآلة تعطي ١ ، وحلّك عند س = ٤ يعطي $\frac{٣}{\sqrt{٩}}$ = ١ ⇐ المشتقة صحيحة

النقاط الحرجة: EQN

السؤال: منحنى الدالة ص = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ١ . أوجد إحداثيات النقاط الحرجة الواقعة على منحنى الدالة.

٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س٢١

اضغط بالترتيب:

MODE 5 3 → 3 = (-) 6 = (-) 9 = = → =

Math ▲
3X²−6X−9=0
X1=3 X2=−1

← من $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} − ٦س − ٩ = ٠ : س = ٣ ، س = −١ ، ثم عوّض في الدالة (بزر CALC): (٣، −٢٦) ، (−١، ٦)

نوع النقطة: d/dx للمشتقة

السؤال: ص = س^{٣} + ٣س^{٢} والنقاط الحرجة (٠، ٠) ، (−٢، ٤). حدّد طبيعة النقاط الحرجة باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س٦

اضغط بالترتيب:

SHIFT ∫□ 3 ALPHA) x^2 + 6 ALPHA) ▶ 0 =

Math ▲
d/dx(3X²+6X)|x=0
6

← اشتقاق المشتقة الأولى يعطي $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ > ٠ ⇐ (٠، ٠) صغرى. كرر عند س = −٢ فتحصل على −٦ < ٠ ⇐ (−٢، ٤) عظمى

نظام معادلتين: EQN

السؤال: ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٤ عند النقطة (٢، ٦) يساوي ٧ . أوجد قيمتي أ، ب

٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور ثاني · س٢٢

اضغط بالترتيب:

MODE 5 1 → 4 = 1 = (-) 1 7 = 4 = 2 = (-) 1 4 = =

Math ▲
4X+Y=−17 , 4X+2Y=−14
X=−5 Y=3

← من الميل: ٤أ + ب = −١٧ ، ومن النقطة: ٤أ + ٢ب = −١٤ ⇐ أ = −٥ ، ب = ٣

١-٤ المشتقة وعلاقتها بالميل

الفكرة ببساطة

ميل الوتر بين نقطتين على المنحنى = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$. كلما اقتربت النقطة الثانية من الأولى اقترب ميل الوتر من **ميل المماس**. هذه النهاية هي المشتقة $\frac{ع ص}{ع س}$ أو د′(س): دالة نعوّض فيها لنعرف ميل المنحنى عند أي نقطة.

ماذا سنتعلم؟

- ميل الوتر وتقدير ميل المماس من سلسلة أوتار.
- تعريف المشتقة كنهاية (الاشتقاق من المبادئ الأولية).
- الرموز $\frac{ع ص}{ع س}$ ، د′(س) ، $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ ، د″(س).

أهداف التعلم (دليل المعلم)

- يفهم (من خلال التمثيل البياني للدالة) أن ميل الدالة عند نقطة هو عبارة عن نهاية الميل لمتتالية مناسبة من المماسات عند تلك النقطة، وعلاقته بمشتقة الدالة، ويستخدم الصيغ د′(س)، د″(س)، $\frac{ع ص}{ع س}$، $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ للمشتقتين الأولى والثانية.

أمثلة الشرح

مثال ١ كتاب الطالب · ص١٤٢

سلسلة من الأوتار مرسومة من النقطة ل(١، ٥) إلى النقاط أ(٠٫٩٧، ٤٫٩٤٠٩)، ب(٠٫٩٨، ٤٫٩٦٠٤)، ج(٠٫٩٩، ٤٫٩٨٠١)، د(٠٫٩٩٥، ٤٫٩٩٠٠٢٥) الواقعة على المنحنى ص = س^{٢} + ٤:

أ أوجد ميل كل وتر من الأوتار ل أ ، ل ب ، ل ج ، ل د .

ب استخدم سلسلة ميول الأوتار لتقدّر قيمة ميل مماس المنحنى عند النقطة ل.

تمارين

١ كتاب الطالب · تمارين ١-٤ س٢

استخدم سلسلة من ميول الأوتار المناسبة لتجد ميل المماس لمنحنى كل دالة عند النقطة المعطاة:

أ ص = س^{٤} ، عند (١، ١)

ب ص = س^{٤} − ٢س + ٣ ، عند (٠، ٣)

ج ص = $\sqrt{٢س}$ ، عند (٤، ٤)

د ص = $\frac{١٢}{س}$ ، عند (٢، ٦)

٤-٢ مشتقة دالة القوة

💡 الفكرة ببساطة

«اضرب المعامل في القوة، واطرح واحدًا من القوة». قبل الاشتقاق حوّل الجذور والكسور إلى قوى، وفُكّ الأقواس. المشتقة الثانية هي مشتقة المشتقة.

📚 ماذا سنتعلم؟

- اشتقاق $س^{ن}$ لأي عدد نسبي ن.
- مشتقة الثابت، والضرب في ثابت، والجمع والطرح.
- ميل المماس عند نقطة، وإيجاد ثوابت من الميل، والمشتقة الثانية.

🎯 أهداف التعلم (دليل المعلم)

- يجد ويستخدم مشتقة لدوال في الصيغة د(س) = $س^{ن}$ (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح للدوال.

أمثلة الشرح

مثال ٣ كتاب الطالب · ص١٤٦

أوجد مشتقة الدالة د(س) = $٣س^{٤} - \frac{١}{٢س^{٢}} + \frac{٤}{\sqrt{س}} + ٥$ بدلالة س.

مثال ٥ كتاب الطالب · ص١٤٧

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $أس^{٤}$ + ب $س^{٢}$ + س يساوي ٣ عند س = ١ ، ويساوي −٥١ عند س = −٢ ، فأوجد قيمتي أ، ب.

مثال ٧ كتاب الطالب · ص١٤٨

إذا علمت أن د(س) = $(٢س^{٢} - ٥)(س + ١)$، فأوجد:

أ د″(س)

ب مجال قيم س عندما تكون د″(س) موجبة.

تمارين

١ كتاب الطالب · تمارين ٤-٢ س١ + س٣

أوجد المشتقة الأولى بدلالة س لكل مما يأتي:

أ د(س) = $س^{٩}$

ب د(س) = $س^{-٤}$

ج ص = $٧س^{٢} - \frac{٣}{س} + \frac{٢}{س^{٢}}$

د ص = $\frac{٤س^{٢} + ٣س - ٢}{\sqrt{س}}$

٢ كتاب الطالب · تمارين ٤-٢ س٤

أوجد قيمة $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ لكل منحنى عند النقطة المعطاة:

أ ص = س^{٢} + س − ٤ عند (١، −٢)

ب ص = ٥ − $\frac{٢}{\text{س}}$ عند (٤، ٤٫٥)

ج ص = $\frac{\text{٣س} - ٢}{\text{س}^{٢}}$ عند (−٢، −٢)

٣ كتاب الطالب · تمارين ٤-٢ س٦ + س٨

أ إذا علمت أن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ للدالة ص = س^{٣} − ٢س^{٢} سالبة، فأوجد مجال قيم س.

ب إذا علمت أن د(س) = ٣س^{٣} + $\frac{٩}{٢}$س^{٢}، فأوجد مجال قيم س بحيث تكون د″(س) موجبة.

٤ كتاب الطالب · تمارين ٤-٢ س١٦ + س١٧

أ إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٧ عند النقطة (١، ٥) يساوي −٥، فأوجد قيمتي أ، ب.

ب إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = أس + $\frac{\text{ب}}{\text{س}^{٣}}$ يساوي ١٦ عند س = ١، ويساوي −٨ عند س = −١، فأوجد قيمتي أ، ب.

٥ كتاب الطالب · تمارين ٤-٢ س٢٢ + س٢٥

أ إذا علمت أن ص = (٣س − ٥)(٢س + ٧)، فبيّن أن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ عدد ثابت.

ب إذا علمت أن د(س) = س^{٤} − ب س^{٢} وأن د′(١) = ٧، فأوجد قيمة د″(−١).

٦ كتاب الطالب · تمارين ٤-٢ س٢٦ ★

إذا علمت أن د(س) = ١٨ + س^{٢} − $\frac{٣}{\text{س}^{٢}}$ ، س ≠ ٠ ، فأوجد مجال قيم س عندما د″(س) ≤ ٠

٤-٣ قاعدة السلسلة

💡 الفكرة ببساطة

لاشتقاق قوس مرفوع لقوة: اضرب في القوة، واطرح واحدًا منها، ثم اضرب في **مشتقة ما داخل القوس**. وللدالة المركبة (هـ ∘ د)′(س) = هـ′(د(س)) × د′(س).

📚 ماذا سنتعلم؟

- اشتقاق (د(س))^{ن} والجذور والكسور ذات المقام المركب.
- مشتقة الدالة المركبة.
- إيجاد ثوابت من الميل باستخدام قاعدة السلسلة.

🎯 أهداف التعلم (دليل المعلم)

- يجد ويستخدم مشتقة الدوال المركّبة باستخدام قاعدة السلسلة، حيث تكون الدوال المركّبة في صورة س^{ن} (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع، والطرح للدوال.

أمثلة الشرح

مثال ٩ كتاب الطالب · ص١٥٣

أوجد مشتقة الدالة ص = $\frac{٢}{(٣س^{٢} + ١)^{٥}}$

مثال ١٠ كتاب الطالب · ص١٥٣

يمر منحنى الدالة ص = $\sqrt{أس + ب}$ بالنقطة (١٢، ٤)، وميله عند هذه النقطة يساوي $\frac{١}{٤}$. أوجد قيمة كل من أ، ب.

مثال ١١ كتاب الطالب · ص١٥٥

إذا علمت أن ع(س) = (د ∘ هـ)(س)، حيث د(س) = ٢س^{٣}، هـ(س) = ٩س^{٢} + ٧:

أ أوجد ع′(س).

ب أكّد الناتج في الجزئية (أ) بإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت ص = ٢(٩س^{٢} + ٧)^{٣}

تمارين

١ كتاب الطالب · تمارين ٤-٣ س١ + س٢ + س٣

أوجد مشتقة كلٍّ مما يأتي بدلالة س:

أ ص = (٣ − ٤س)^{٥}

ب ص = (س^{٢} − $\frac{٥}{س}$)^{٥}

ج ص = $\frac{٣}{س - ٥}$

د ص = $\frac{١٦}{س^{٢} + ٢}$

هـ ص = $\sqrt{٢س^{٢} - ١}$

٢ كتاب الطالب · تمارين ٤-٣ س٤ + س٧

أ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢س − ٣)^{٥} عند النقطة (٢، ١).

ب أوجد إحداثيات النقطة التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\sqrt{س^{٢} - ١٠س + ٢٦}$ يساوي صفرًا.

٣ كتاب الطالب · تمارين ٤-٣ س١٢ ★

إذا علمت أن الدالة ع(س) = $\sqrt{\frac{٢س - ١}{س}}$، فأوجد:

أ ع′(س).

ب قيمة ك عندما يكون ميل المماس لمنحنى الدالة ع(س) عند س = $\frac{٢}{٣}$ يساوي ك$\sqrt{٢}$

٤-٤ المماس والعمودي

الفكرة ببساطة

ميل المماس = قيمة المشتقة عند النقطة. **العمودي** هو المستقيم العمودي على المماس عند نقطة التماس، فميله = $-\frac{١}{م}$.

تحتاج دائمًا: نقطة + ميل، ثم ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$).

ماذا سنتعلم؟

- معادلة المماس ومعادلة العمودي عند نقطة.
- نقاط تقاطع المماس أو العمودي مع المحورين أو مع المنحنى مرة أخرى.
- إيجاد ثوابت إذا عُلم ميل المماس أو العمودي أو معادلته.

أهداف التعلم (دليل المعلم)

- يجد ويستخدم ميل المماس أو المستقيم العمودي على منحنى الدالة، أو معادلة المماس و/أو معادلة المستقيم العمودي لدوال في الصيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع، والطرح للدوال، والدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة.

أمثلة الشرح

مثال ١٤ كتاب الطالب · ص١٥٩

أوجد معادلتي المماس، والعمودي لمنحنى الدالة ص = ٢س^{٢} + $\frac{٨}{س}$ − ٩ عند س = ٢

مثال ١٥ كتاب الطالب · ص١٦٠

إذا علمت أن معادلة منحنى الدالة ص = (٤ − $\sqrt{س}$)^{٣}، وكان العمودي عند النقطة ل(٤، ٨) يتقاطع مع العمودي عند النقطة ن(٩، ١) في النقطة ر، فأوجد إحداثيات النقطة ر.

تمارين

١ كتاب الطالب · تمارين ٤-٤ س٣

إذا علمت أن منحنى الدالة ص = $\frac{٨}{(س + ٢)^{٢}}$ يمر بالنقطة أ(٢، $\frac{١}{٢}$)، فأوجد:

أ معادلة مماس المنحنى عند النقطة أ.

ب معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة أ.

٢ كتاب الطالب · تمارين ٤-٤ س٤

إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = ٥ − ٣س − ٢س^{٢}:

أ بيّن أن معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة (−٢، ٣) هي س + ٥ص = ١٣

ب أوجد إحداثيات النقطة الثانية التي يتقاطع فيها العمودي مع المنحنى.

٣ كتاب الطالب · تمارين ٤-٤ س١٣

إذا علمت أن منحنى الدالة ص = س(س − ١)(س + ٢) يتقاطع مع محور السينات في النقاط و(٠، ٠)، أ(١، ٠)، ب(−٢، ٠)، والعموديان على المنحنى عند النقطتين أ، ب يتقاطعان في النقطة ج، فأوجد إحداثيات النقطة ج.

٤ كتاب الطالب · تمارين ٤-٤ س١٦

إذا علمت أن العمودي على منحنى الدالة ص = ٢س^{٢} + ك س − ٣ عند النقطة (٣، −٦) يوازي المستقيم س + ٥ص = ١٠، فأوجد:

أ قيمة ك.

ب إحداثيات النقطة الثانية التي يتقاطع فيها العمودي والمنحنى.

٥ كتاب الطالب · مراجعة الوحدة س١٢ ★

إذا علمت أن منحنى الدالة ص = ٣س − $\frac{٤}{س}$ يمر بالنقطتين أ(١، −١)، ب(٤، ١١)، وأن المماس عند كل من النقطتين ج، د يوازي القطعة المستقيمة أ ب، فأوجد معادلة العمودي المنصف للقطعة المستقيمة ج د.

٦ كتاب الطالب · مراجعة الوحدة س١٤ ★

ليكن ص = ٣ + ٤س − س^{٢}:

أ بيّن أن معادلة العمودي على منحنى الدالة ص عند النقطة (٣، ٦) هي ٢ص = س + ٩

ب إذا علمت أن العمودي عند النقطة (٣، ٦) يتقاطع مع محوري الإحداثيات في النقطتين أ، ب، فأوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب.

ج أوجد إحداثيات النقطة التي يتقاطع فيها العمودي مع المنحنى مرة أخرى.

٤-٥ الدوال المتزايدة والمتناقصة

الفكرة ببساطة

إشارة المشتقة الأولى تخبرك باتجاه المنحنى: موجبة ⇐ صاعد (متزايدة)، سالبة ⇐ نازل (متناقصة). لإيجاد المجال حل المتباينة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} > ٠$ أو < ٠، وإذا كانت المشتقة تربيعية فارسمها وانظر أين تكون فوق المحور أو تحته.

ماذا سنتعلم؟

- تحديد مجال التزايد والتناقص.
- حل متباينات تربيعية بالرسم أو جدول الإشارات.
- إثبات أن دالة متزايدة أو متناقصة دائمًا.

أهداف التعلم (دليل المعلم)

- يجد ويستخدم المشتقة الأولى ليحدّد قيم س التي تكون عندها الدالة في الصيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع، والطرح، متزايدة، أو متناقصة.

أمثلة الشرح

مثال ١٦ كتاب الطالب · ص١٦٥

أوجد مجموعة قيم س بحيث تكون الدالة ص = ٨ − ٣س − س^{٢} متناقصة.

تمارين

١ كتاب الطالب · تمارين ٤-٥ س١ + س٢

أوجد مجموعة قيم س عندما تكون كل دالة متزايدة (أ، ب) أو متناقصة (ج، د):

أ د(س) = ٥ − ٧س − ٢س^{٢}

ب د(س) = س^{٣} − ١٢س^{٢} + ٢

ج د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ٥

د د(س) = ٢س^{٣} − ٢١س^{٢} + ٦٠س − ٥

٢ كتاب الطالب · تمارين ٤-٥ س٣

أوجد قيم س عندما تكون د(س) = $\frac{١}{٦}$(٥ − ٢س)^{٣} + ٤س متزايدة.

٣ كتاب الطالب · تمارين ٤-٥ س٤ ★

إذا كانت د(س) = $\frac{٤}{١ - ٢س}$ ، حيث س ≤ ١ ، فأوجد د′(س)، وحدّد ما إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو غير ذلك.

٤ كتاب الطالب · تمارين ٤-٥ س٩

ينتج مصنع س سلعة كل يوم، وكانت دالة الربح ع(س) = ٢س^{٣} − ٨١س^{٢} + ٨٤٠س . أوجد عدد السلع (س) المنتجة التي يتناقص فيها الربح.

٤-٦ النقاط الحرجة

الفكرة ببساطة

عند النقطة الحرجة يكون المماس أفقيًا ($\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠). نحدّد نوعها بإشارة المشتقة الثانية (سالبة عظمى، موجبة صغرى) أو بتغيّر إشارة المشتقة الأولى حول النقطة. إذا كانت $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ = ٠ فلا بد من اختبار المشتقة الأولى.

ماذا سنتعلم؟

- إيجاد النقاط الحرجة وإحداثياتها.
- تحديد نوعها باختبار المشتقة الأولى والثانية، ونقطة الانعطاف.
- إيجاد ثوابت من نقطة حرجة معطاة، وأسئلة «لا توجد نقاط حرجة».

أهداف التعلم (دليل المعلم)

- يحدّد النقاط الحرجة لدوال في الصيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع، والطرح للدوال، ويستخدم المشتقتين الأولى والثانية ليحدّد نوعها (طبيعتها).

أمثلة الشرح

مثال ٢٠ كتاب الطالب · ص١٧٢

أوجد إحداثيات النقاط الحرجة الواقعة على منحنى الدالة د(س) = $\frac{س^{٢} + ٩}{س}$ ، واستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحدد نوع النقاط الحرجة.

تمارين

١ كتاب الطالب · تمارين ٤-٦ س١ + س٢

أوجد إحداثيات النقاط الحرجة لكل من المنحنيات الآتية، وحدد نوع كل نقطة منها:

أ) ص = س^{٣} − ٣٢س + ٦

ب) ص = س^{٤} + ٤س − ١

ج) ص = ٤س^{٢} + $\frac{٨}{س}$

د) ص = $\frac{(س - ٣)^{٢}}{س}$

٢ كتاب الطالب · تمارين ٤-٦ س٣

إذا كانت ص = $\frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}}$ ، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$، ثم اشرح سبب عدم وجود نقطة حرجة للمنحنى.

٣ كتاب الطالب · تمارين ٤-٦ س٥ + س٦

أ إذا علمت أن لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + أس^{٢} − ٩س + ٢ نقطة عظمى عند س = −٣، فأوجد قيمة أ، ومجال قيم س عندما تكون الدالة متناقصة.

ب إذا علمت أن منحنى الدالة ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س − ٣٠ يمر بالنقطة (٤، ٢)، وله نقطة حرجة عند س = ٣، فأوجد قيمتي أ، ب، وإحداثيات النقطة الحرجة الأخرى ونوعها.

٤ كتاب الطالب · تمارين ٤-٦ س١٠ ★

يوجد لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب نقطة حرجة عند (٤، −٢٧):

أ أوجد قيمتي أ، ب.

ب حدد نوع النقطة الحرجة (٤، −٢٧).

ج أوجد إحداثيات النقاط الحرجة الأخرى على المنحنى، وحدد نوع كل منها.

د أوجد إحداثيات النقطة الواقعة على المنحنى التي يكون لدالة الميل عندها قيمة صغرى، وأوجد هذه القيمة الصغرى.

القسم ٣ الأسئلة الوزارية

١ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س٥

ص = ٤س^{٥} + ٢س^{٣} − س − ١ . (ظلّل الشكل المقترن بقيمة $\frac{ع ص}{ع س}$ عند س = −١) [١]

○ −٢٧ ○ −٦ ○ ٤ ○ ٢٥

↩ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

١-أ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س٥

الدالة د(س) = −٨س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤س − ٥ . (ظلّل الشكل المقترن بالمشتقة الأولى بدلالة س) [١]

○ −٨س ٢ + ٣س + ٤ ○ −٨س ٢ + ٣س − ١ ○ −٢٤س ٢ + ٦س + ٤ ○ −٢٤س ٢ + ٦س − ١

١-ب ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور أول · س٨

د(س) = ٢$\sqrt{س}$. (ظلّل الشكل المقترن بالمشتقة الأولى) [١]

○ − $\frac{١}{س\sqrt{س}}$ ○ − $\sqrt{س}$ ○ $\frac{١}{س\sqrt{س}}$ ○ $\sqrt{س}$

١-ج ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س١٤

(ظلّل الشكل المقترن بمشتقة الدالة ص = $\frac{١٢}{\sqrt[٣]{س}}$ بدلالة س) [١]

○ $\frac{٤}{\sqrt[٣]{س^{٤}}}$ ○ − $\frac{٤}{\sqrt[٣]{س^{٤}}}$ ○ ٤ ٣ $\sqrt{س^{٤}}$ ○ −٤ ٣ $\sqrt{س^{٤}}$

١-د ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س١٥

د(س) = ب س^{٤} − س ، د′(١) = ٧ . (ظلّل الشكل المقترن بقيمة ب) [١]

○ −٢ ○ ٨ ○ −٨ ○ ٢

١-هـ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س٢٣

د(س) = ب س^{٣} + ٣س^{٢} ، د′(١) = ٩ . (ظلّل الشكل المقترن بقيمة د′(٢)) [١]

○ ١ ○ ٩ ○ ١٨ ○ ٢٤

١-و ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور ثاني · س١٢

د(س) = (س + أ)^{٢} ، د′(٢) = ٨ . (ظلّل الشكل المقترن بقيمة أ) [١]

○ −٦ ○ −٢ ○ ٢ ○ ٦

٢ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س١٩

ع(س) = (د ∘ هـ)(س) ، حيث د(س) = س^{٣} ، هـ(س) = س^{٢} + ١ . أوجد ع′(س) [٤]

↩ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٢-أ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س١٩

ع(س) = (د ∘ هـ)(س) ، حيث د(س) = ٢س^{٢} ، هـ(س) = س + ٥ . أوجد ع′(س) [٤]

٢-ب ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س١٣

ع(س) = (هـ ∘ د)(س) ، حيث د(س) = ٢س + ١ ، هـ(س) = $\sqrt[٣]{س}$. أوجد ع′(س) [٤]

٢-ج ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور ثاني · س٢٦

ع(س) = (هـ ∘ د)(س) ، د(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ، هـ(س) = ٢س^{٢} − ٥ . (ظلّل الشكل المقترن بـ ع′(س)) [١]

○ ٨س^{٣} − ٢٠س ○ ٨س^{٢} − ٢٠س ○ ٢س^{٣} ○ ٢س^{٢}

٢-د ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور ثاني · س٨

ص = (٥س + ٣)^{٤} . (ظلّل الشكل المقترن بمشتقة الدالة ص بدلالة س) [١]

○ ٢٠(٥س + ٣)^{٣} ○ ٤(٥س + ٣)^{٣} ○ ٢٠س(٥س + ٣)^{٣} ○ ٤س(٥س + ٣)^{٣}

٢-هـ ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور ثاني · س٢٩

د(س) = $(٥ - \frac{٤}{س^{٣}})^{\frac{٣}{٢}}$. أوجد مشتقة د(س) بدلالة س [٣]

٢-و ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور أول · س١٣

ص = ك^{٦} + ٣ك ، ك = س^{٢} − ٤ . أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٢ [٣]

٣ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س٦

منحنى الدالة ص = س^{٢}(٣س + ٢) . أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص عند س = −١ [٥]

↩ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٣-أ ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س١٢

منحنى الدالة ص = (٢س + ١)^{٢} . (ظلّل الشكل المقترن بقيمة ميل المماس عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات) [١]

○ ٠ ○ ١ ○ ٢ ○ ٤

٣-ب ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س٢٠

منحنى معادلته ص = $\frac{١٨}{٢س + ٣}$. أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٠، ٦) [٤]

٣-ج ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س٢٠

منحنى معادلته ص = (س − ٢)^{٢} . أوجد معادلة المماس عند النقطة (١، ١) [٤]

٣-د ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور ثاني · س١٣

ص = س^{٢} − ١ . أوجد معادلة المماس عند النقطة (١، ٠) [٤]

٣-هـ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور ثاني · س٢١

ص = ٢ + س^{٢} . (ظلّل الشكل المقترن بمعادلة المماس لمنحنى ص عند النقطة (−١، ٣)) [١]

○ ص = −٢س + ٤ ○ ص = −٢س + ١ ○ ص = ٦س − ٣ ○ ص = ٦س + ٢

٤ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س٢٣

ص = ٣س + $\sqrt{\text{س}}$. (ظلّل الشكل المقترن بميل العمودي على المماس عند س = ١) [١]

○ $-\frac{٢}{٣}$ ○ $-\frac{٢}{٧}$ ○ $\frac{٣}{٢}$ ○ $\frac{٧}{٢}$

↩ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٤-أ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س١٥

ص = ٧س^{٢} − ٩س . (ظلّل الشكل المقترن بميل العمودي عند (١، −٢)) [١]

○ ٥ ○ $\frac{١}{٥}$ ○ −٥ ○ $-\frac{١}{٥}$

٤-ب ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور ثاني · س١٤

ص = ٢$\sqrt{\text{س} + ١}$. (ظلّل الشكل المقترن بميل العمودي على المماس عند س = ٣) [١]

○ −٢ ○ $-\frac{١}{٢}$ ○ $\frac{١}{٢}$ ○ ٢

٤-ج ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س٢٧

ص = (س − أ)^{٢} ، ميل العمودي = $\frac{١}{٢}$ عند النقطة (٠، ١). (ظلّل الشكل المقترن بقيمة أ) [١]

○ −١ ○ $\frac{١}{٤}$ ○ $-\frac{١}{٤}$ ○ ١

٤-د ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س٢٩

منحنى معادلته ص = د(س) ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{٢}$ س . رُسم مستقيم عمودي على مماس المنحنى عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب، حيث أ(١، ٢)، ب(٣، ٠). أوجد معادلة العمودي. [٣]

٥ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور أول · س١٥ ⚠ قدرات عليا

المستقيم ص = $\frac{-\text{س} + ٣}{٢}$ عمودي على المنحنى ق(س) = أ − س^{٢} . أوجد قيمة الثابت أ [٤]

↩ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٥-أ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور ثاني · س١٥ ⚠ قدرات عليا

المستقيم ص = س + ق يمس المنحنى ص = $\sqrt{٨\text{س}}$ عند النقطة (س١، ص١) . أوجد قيمة الثابت ق [٤]

٥-ب ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور ثاني · س٢٢

ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٤ عند النقطة (٢، ٦) يساوي ٧ . أوجد قيمتي أ، ب [٤]

٦ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س١٢

د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٤س . أوجد مجال قيم س التي تكون عندها الدالة متناقصة [٥]

↩ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٦-أ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س٧

ص = س^{٢} + ٤س . (ظلّل الشكل المقترن بمجموعة قيم س التي تجعل الدالة متزايدة) [١]

○ س ≤ −٢ ○ س > −٢ ○ س < −٢ ○ س ≥ −٢

٦-ب ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س٢٤

د(س) = ٣س^{٢} + ١٢س . أوجد مجال التزايد [٣]

٦-ج ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س٦

الدالة ص = س^{٢} − ٦س . أوجد مجموعة قيم س التي تكون عندها الدالة متزايدة [٤]

٦-د ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور ثاني · س٦

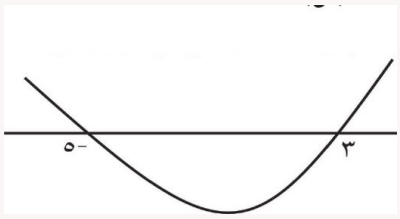
د(س) = ٤س^{٢} − ١٦س . أوجد مجموعة قيم س التي تكون عندها الدالة متناقصة [٤]

٦-هـ ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور ثاني · س١٣

د(س) = (س + ٢)^{٢} . أوجد مجموعة قيم س بحيث تكون الدالة د(س) متناقصة [٣]

٦-و ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س٧

الشكل الآتي يمثل بيان د′(س). (ظلّل الشكل المقترن بمجال قيم س عندما تكون د(س) متناقصة) [١]



○ س < ٣ ○ −٥ < س < ٣ ○ س < −٥ ○ −٣ < س < ٥

٦-ز ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور أول · س١٢

د(س) = ٣س^{٢} − س^{٣} . (ظلّل الشكل المقترن بمجال قيم س عندما تكون د″(س) سالبة) [١]

○ س < ١ ○ س > ١ ○ س < −١ ○ س < −١

٦-ج ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور أول · س٢٢ ⚠ قدرات عليا

د(س) = $\sqrt[٣]{٦س - س^{٢}}$ ، حيث ٠ < س < ٦ . حدد مجال قيم س بحيث تكون د(س) متزايدة [٤]

٧ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س١٢

منحنى معادلته ص = ٣س^{٣} + $\frac{٩}{٢}$س^{٢} . أوجد إحداثيات النقاط الحرجة للمنحنى [٥]

↩ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٧-أ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س٢٤

ص = ٥س^{٢} − ١٠س . أوجد النقطة الحرجة ونوعها [٣]

٧-ب ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س٢١

منحنى الدالة ص = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ١ . أوجد إحداثيات النقاط الحرجة الواقعة على منحنى الدالة [٥]

٧-ج ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور أول · س٢١

ص = $\sqrt[٣]{٨س}$ − ٢س . (ظلّل الشكل المقترن بإحداثيات النقطة الحرجة للمنحنى ص) [١]

○ (٠، ٤)　○ (٤، ٨)　○ (٨، ٢)　○ (٢، ٠)

٧-د ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور ثاني · س١٢

ق′(٣) = ٠ . (ظلّل الشكل المقترن بالنقطة الحرجة للمنحنى ق(س)) [١]

○ (٣، ٠)　○ (٠، ٣)　○ (٣، ق(٣))　○ (٠، ق(٠))

٧-هـ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور ثاني · س٢٧

منحنى معادلته ص = أس^{٢} + ٥س له نقطة حرجة عند س = $-\frac{١}{٢}$. (ظلّل الشكل المقترن بقيمة أ) [١]

○ −٥　○ $-\frac{٥}{٢}$　○ $\frac{٥}{٢}$　○ ٥

٧-و ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور أول · س٢٦

الدالة ص = ك س^{٢} + $\frac{٨}{س}$. (ظلّل الشكل المقترن بقيمة ك عندما يكون للدالة نقطة حرجة عند س = ٢) [١]

○ −٢　○ $-\frac{١}{٢}$　○ $\frac{١}{٢}$　○ ٢

٨ ٢٠٢٣/٢٠٢٤ · دور أول · س٦

ص = س^{٣} + ٣س^{٢} ، والنقاط الحرجة (٠، ٠) ، (−٢، ٤). حدد طبيعة النقاط الحرجة باستخدام اختبار المشتقة الثانية [٥]

↩ نفس الفكرة في امتحانات أخرى — حلّها بنفس الطريقة:

٨-أ ٢٠٢٤/٢٠٢٥ · دور ثاني · س٢١

منحنى الدالة ص = −س^{٢} + ٢س − ٣ . أوجد إحداثيات النقطة الحرجة الواقعة على منحنى الدالة، وحدد نوعها [٥]

٨-ب ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور ثاني · س٢٦

لمنحنى الدالة ص = س^{٤} − ٢س^{٢} نقاط حرجة . باستخدام اختبار المشتقة الأولى حدد نوع النقاط الحرجة [٥]

٨-ج ٢٠٢٥/٢٠٢٦ · دور أول · س٢٦ ⚠ قدرات عليا

منحنى الدالة ص = س^{٣} − أس^{٢} + ب س + ١ له نقطة حرجة عند (١، ٥) ونقطة حرجة عند (س$_{١}$، ص$_{١}$). حدد نوع النقطتين الحرجتين [٥]

من الامتحانات الوزارية

خلاصة الوحدة: انتبه لهذه الأخطاء

جاءت هذه الوحدة بـ **٢٤ درجة من ٧٠** في ٢٠٢٤ (١٠ أسئلة)، و**١٧-١٨ درجة** في ٢٠٢٥ و٢٠٢٦ (٧ أسئلة). أغلبها مباشر لمن ينتبه لهذه النقاط:

١) حوّل قبل الاشتقاق

$\frac{١٢}{\sqrt[٣]{س}}$ = ١٢س$^{-\frac{١}{٣}}$ ، و٢$\sqrt{س}$ = ٢س$^{\frac{١}{٢}}$. أكثر الأخطاء في القوى السالبة والكسرية.

٢٠٢٥ أول س١٤ · ٢٠٢٦ أول س٨

٢) مشتقة ما داخل القوس

في (٥س + ٣)^{٤} المشتقة ٢٠(٥س + ٣)^{٣} لا ٤(٥س + ٣)^{٣}. لا تنسَ الضرب في ٥.

٢٠٢٦ ثاني س٨ · ٢٠٢٥ ثاني س٢٩

٣) ترتيب التركيب

(هـ ∘ د)(س) = هـ(د(س)): ابدأ بالدالة اليمنى. اكتب الدالة المركبة أولًا ثم اشتق.

٢٠٢٤ س١٩ · ٢٠٢٥ س١٣ و٢٦

٤) العمودي ≠ المماس

ميل العمودي = − $\frac{١}{م}$. خيارات الاختيار من متعدد تضع ميل المماس وعكسه دون إشارة لتخدعك.

٢٠٢٤ أول س٢٣ · ٢٠٢٥ ثاني س١٤

٥) ص من الدالة لا من المشتقة

بعد إيجاد س من $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ عوّض في **الدالة الأصلية** لتجد ص.

٢٠٢٤ ثاني س١٢ · ٢٠٢٥ أول س٢١

٦) المتباينة التربيعية

لـ س^{٢} − ٤ < ٠ الجواب −٢ < س < ٢ (بين الجذرين)، ولـ > ٠ خارج الجذرين. ارسم قطع المشتقة.

٢٠٢٤ أول س١٢ · ٢٠٢٤ ثاني س٧

٧) رسم المشتقة لا الدالة

إذا أعطاك بيان د′(س): الدالة متناقصة حيث يكون الرسم **تحت** محور السينات.

٢٠٢٤ ثاني س٧

٨) نقطة على المستقيم وعلى المنحنى

نقطة التماس تحقق معادلة المنحنى ومعادلة المستقيم معًا، وميلها = ميل المستقيم (أو سالب مقلوبه للعمودي).

٢٠٢٦ أول س١٥ · ٢٠٢٦ ثاني س١٥

٩) معلومتان = معادلتان

نقطة على المنحنى تعطي معادلة، والميل أو النقطة الحرجة تعطي معادلة أخرى. حلّهما معًا (EQN).

٢٠٢٦ ثاني س٢٢ · ٢٠٢٦ أول س٢٦

١٠) الاختبار المطلوب

إذا طُلب «اختبار المشتقة الأولى» فارسم جدول الإشارات، ولا تكتفِ بالمشتقة الثانية – وإلا تخسر درجة الطريقة.

٢٠٢٦ ثاني س٢٦

أسئلة كامبريدج

١ 9709/13/M/J/25 · س١

منحنى معادلته ص = ٢س + $\frac{١٢}{س^{٢}}$. أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (−٢، −١) في الصورة ص = م س + جـ [٤]

٢ 9709/12/F/M/24 · س٥

منحنى معادلته ص = $\frac{٣}{٢س^{٢}-٥}$. أوجد معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة (٢، ١) في الصورة أس + ب ص + جـ = ٠،
حيث أ، ب، جـ أعداد صحيحة. [٦]

٣ 9709/11/O/N/24 · س٢

للمنحنى ص = س^{٢} − $\frac{أ}{س}$ نقطة حرجة عند (−٣، ب). أوجد قيمتي الثابتين أ، ب. [٤]

٤ 9709/11/O/N/22 · س٣

منحنى معادلته ص = أس$^{\frac{١}{٢}}$ − ٢س ، حيث س > ٠ و أ ثابت. للمنحنى نقطة حرجة عند النقطة ل التي إحداثيها السيني ٩ . أوجد الإحداثي الصادي للنقطة ل. [٥]

٥ 9709/13/M/J/24 · س٥

معادلة منحنى ص = ٢س^{٢} − $\frac{١}{٢س^{٢}}$ + ٣ .

أ أوجد إحداثيات النقطة الحرجة. [٣]

ب حدّد نوع النقطة الحرجة. [٢]

ج للقيم الموجبة لـ س، حدّد ما إذا كان المنحنى يمثل دالة متزايدة أو متناقصة أو غير ذلك، مع ذكر السبب. [٢]

٦ 9709/13/M/J/25 · س١٠

منحنى معادلته ص = $\frac{٩}{٢س^{٢}-٥}$ + ٢س − ٥ .

أ أوجد إحداثيات النقطتين الحرجتين. [٤]

ب أوجد $\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٢}}$ ومن ثمّ حدّد نوع كل نقطة حرجة. [٣]

٧ 9709/12/O/N/21 · س١٠

الدالة د معرّفة بالقاعدة د(س) = س^{٢} + $\frac{ك}{س}$ + ٢ ، حيث س > ٠ .

أ إذا علمت أن للمنحنى ص = د(س) نقطة حرجة عند س = ٢ ، فأوجد ك. [٣]

ب حدّد نوع النقطة الحرجة. [٢]

ج إذا علمت أنها النقطة الحرجة الوحيدة، فأوجد مدى د. [٢]

٨ 9709/11/M/J/21 · س٦

معادلة منحنى ص = (٢ك − ٣)س^{٢} − ك س − (ك − ٢) ، حيث ك ثابت. المستقيم ص = ٣س − ٤ مماس للمنحنى. أوجد قيمة ك. [٥]

٩ 9709/13/O/N/23 · س٦

معادلة مستقيم ص = ٦س − جـ ، ومعادلة منحنى ص = جـ س^{٢} + ٢س − ٣ ، حيث جـ ثابت. المستقيم يمس المنحنى عند النقطة ل. أوجد القيم الممكنة لـ جـ والإحداثيات المناظرة للنقطة ل. [٧]

١٠ 9709/13/O/N/21 · س٣

أ اكتب ٥ص^{٢} − ٣٠ص + ٥٠ في الصورة ٥(ص + أ)^{٢} + ب ، حيث أ، ب ثابتان. [٢]

ب الدالة د معرّفة بالقاعدة د(س) = س^{٥} − ١٠س^{٣} + ٥٠س لكل الأعداد الحقيقية. حدّد ما إذا كانت د متزايدة أو متناقصة أو غير ذلك. [٣]

أسئلة القدرات العليا

١ 0606/13/M/J/25 · س١٢

العمودي على المنحنى ص = $\frac{٤}{س^{٢}}$ + أس + ٧ عند النقطة التي فيها س = ٢ معادلته س + ٤ص = ب . أوجد قيمتي أ، ب. [٦]

٢ 0606/22/O/N/21 · س٩

أ أوجد معادلة العمودي على المنحنى ص = س^{٣} + س^{٢} − ٤س + ٦ عند النقطة (١، ٤). [٥]

ب دون استخدام الآلة الحاسبة: أوجد الإحداثي السيني الدقيق لكلٍّ من النقطتين اللتين يقطع فيهما العمودي المنحنى مرة أخرى. [٥]

٣ 0606/22/M/J/23 · س٢

منحنى معادلته ص = ٣٢س^{٢} + $\frac{١}{٨س^{٢}}$ ، حيث س ≠ ٠ .

أ أوجد إحداثيات النقاط الحرجة للمنحنى. [٥]

ب النقطتان من النوع نفسه. استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحدد ما إذا كانتا عظمى أم صغرى. [٣]

٤ 0606/12/M/J/21 · س٦

دون استخدام الآلة الحاسبة. منحنى معادلته ص = (٣ + $\sqrt{٥}$)س^{٢} − ٨$\sqrt{٥}$س + ٦٠ .

أ أوجد الإحداثي السيني للنقطة الحرجة في الصورة أ + ب$\sqrt{٥}$ ، حيث أ، ب عددان صحيحان. [٤]

ب ومن ثمّ أوجد الإحداثي الصادي لهذه النقطة في الصورة ج$\sqrt{٥}$ ، حيث ج عدد صحيح. [٣]

٥ 0606/13/M/J/23 · س٦

دائرة مركزها م ونصف قطرها نق. مساحة القطاع الأصغر م أ ب تساوي ٢٥ سم^{٢}، والزاوية أ م ب = هـ.

أ أوجد عبارة لمحيط القطاع الأصغر م أ ب (ح) بدلالة نق. [٣]

ب إذا كان نق متغيرًا، فبيّن أن لـ ح قيمة صغرى، وأوجد هذه القيمة. [٤]

٦ 0606/12/O/N/24 · س٢

د(س) = (٢س − ٥)(س − ١)^{٢} .

أ أوجد إحداثيات النقاط الحرجة على المنحنى ص = د(س). [٤]

ب ارسم منحنى ص = د(س) موضحًا نقاط تقاطعه مع المحورين. [٣]

ج ومن ثمّ أوجد قيم ك التي يكون عندها للمعادلة د(س) = ك حل واحد فقط. [٢]

مفاتيح الإجابة

الدرس ٤-١ المشتقة وعلاقتها بالميل

مثال ١ أ) ٢,٩١٠٩ ، ٢,٩٤٠٤ ، ٢,٩٧٠١ ، ٢,٩٨٥٠٢ ب) ٣

١ أ) ٤ ب) −٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) −٣

الدرس ٤-٢ مشتقة دالة القوة

مثال ٣ $١٢س^{٣} + \frac{١}{س^{٣}} - \frac{٢}{\sqrt{س^{٣}}}$

مثال ٥ أ = ٢ ، ب = −٣

مثال ٧ أ) ١٢س + ٤ ب) س > $-\frac{١}{٣}$

١ أ) ٩س^{٨} ب) $-\frac{٤}{س^{٥}}$ ج) ١٤س + $\frac{٣}{س^{٢}} - \frac{٤}{س^{٣}}$
د) $٦\sqrt{س} + \frac{٣}{\sqrt{س^{٣}}} + \frac{١}{\sqrt{س^{٣}}}$

٢ أ) ٣ ب) ٠,٥ ج) $-\frac{٥}{٤}$

٣ أ) س < $\frac{٢}{٣}$ ب) س > $-\frac{١}{٢}$

٤ أ) أ = −٥ ، ب = ٢ ب) أ = ٤ ، ب = −٦

٥ أ) $\frac{ع^{٢}ص}{ع س^{٢}}$ = ١٢ ب) ١٥

٦ $-\sqrt{٣} \geq$ س > ٠ أو ٠ > س $\geq \sqrt{٣}$

الدرس ٤-٣ قاعدة السلسلة

مثال ٩ $-\frac{٦٠س}{(٣س^{٢} + ١)^{٦}}$

مثال ١٠ أ = ٢ ، ب = −٨

مثال ١١ أ) ١٠٨س (٩س^{٢} + ٧)^{٢} ب) الناتج نفسه

١ أ) −٢٠(٣ − ٤س)^{٤} ب) $\frac{٥(٢س^{٣} + ٥)(س^{٣} - ٥)^{٤}}{س^{٦}}$
ج) $-\frac{٣}{(س - ٥)^{٢}}$ د) $-\frac{٣٢س}{(س^{٢} + ٢)^{٢}}$ هـ) $\frac{٢س}{\sqrt{٢س^{٢} - ١}}$

٢ أ) ١٠ ب) (٥، ١)

٣ أ) ع′(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{٢س^{٤} - س^{٣}}}$ ب) ك = $\frac{٩}{٨}$ = ١,١٢٥

الدرس ٤-٤ المماس والعمودي

مثال ١٤ المماس: ص = ٦س − ١١ ، العمودي: س + ٦ص = ٨

مثال ١٥ ر(١٤,٢، ١١,٤)

١ أ) س + ٤ص = ٤ ب) ص = ٤س − ٧,٥

٢ أ) برهان ب) (٠,٠٦، ٢,٤٨)

٣ ج(٤، −١)

٤ أ) ك = −٧ ب) (٠,٤، −٥,٤٨)

٥ ص = $-\frac{١}{٢}$ س

٦ أ) برهان ب) (−$\frac{٩}{٢}$، $\frac{٩}{٤}$) ج) ($\frac{١}{٢}$، ٤,٧٥)

الدرس ٤-٥ الدوال المتزايدة والمتناقصة

مثال ١٦ س > −$\frac{٣}{٢}$

١ أ) س < −١,٧٥ ب) س < ٠ أو س > ٨ ج) −١ < س < ٣
د) ٢ < س < ٥

٢ ١,٥ < س < ٣,٥

٣ د′(س) = $\frac{٨}{(١ - ٢س)^{٢}}$ > ٠ ⇐ متزايدة

٤ ٧ < س < ٢٠ ، س عدد صحيح

الدرس ٤-٦ النقاط الحرجة

مثال ٢٠ (−٣، −٦) عظمى ، (٣، ٦) صغرى

١ أ) (−٢، ٢٢) عظمى ، (٢، −١٠) صغرى
ب) (−١، −٤) صغرى ج) (١، ١٢) صغرى
د) (−٣، −١٢) عظمى ، (٠، ٣) صغرى

٢ $\frac{ع ص}{ع س} = ١ + \frac{٩}{س^{٢}}$ ≠ ٠ ⇐ لا توجد نقاط حرجة

٣ أ) أ = ٣ ، −٣ < س < ١
ب) أ = −١٥ ، ب = ٣٦ : (٢، −٢) عظمى

٤	أ) أ = −٦ ، ب = ٥ ب) صغرى ج) (٠، ٥) عظمى د) (٢، −١١) ، −١٢

الأسئلة الوزارية

١	٢٥
١-ب	$\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$
١-د	٢
١-و	٢
٢-أ	ع′(س) = ٤س + ٢٠
٢-ج	٢س^{٣}
٢-هـ	د′(س) = $-\frac{٣٦}{س^{٢}}(٥ - \frac{٤}{س})^{٤}$
٣	٥
٣-ب	ص = −٤س + ٦
٣-د	ص = ٢س − ٢
٤	$-\frac{٢}{٧}$
٤-ب	−٢
٤-د	ص = −س + ٣
٥-أ	ق = ٢
٦	−٢ < س < ٢
٦-ب	س > −٢
٦-د	س < ٢
٦-و	−٥ < س < ٣
٦-ح	٠ < س < ٣
٧-أ	(١، −٥) صغرى
٧-ج	(٤، ٨)
٧-هـ	٥
٨	(٠، ٠) صغرى ، (−٢، ٤) عظمى
٨-ب	(٠، ٠) عظمى ، (١، −١) ، (−١، −١) صغرى

١-أ	−٤س^{٢} + ٦س + ٤
١-ج	$-\frac{٤}{\sqrt[٣]{س^{٤}}}$
١-هـ	٢٤
٢	ع′(س) = ٦س (س^{٢} + ١)^{٢}
٢-ب	ع′(س) = $\frac{٣}{\sqrt{٢س + ١}}$
٢-د	٢٠(٥س + ٣)^{٣}
٢-و	١٢
٣-أ	٤
٣-ج	ص = −٢س + ٣
٣-هـ	ص = −٢س + ١
٤-أ	$-\frac{١}{٥}$
٤-ج	١
٥	أ = ٣
٥-ب	أ = −٥ ، ب = ٣
٦-أ	س > −٢
٦-ج	س < ٣
٦-هـ	س < −٢
٦-ز	س < ١
٧	(٠، ٠) ، (−١، $\frac{٣}{٢}$)
٧-ب	(−١، ٦) ، (٣، −٢٦)
٧-د	(٣، ق(٣))
٧-و	$\frac{١}{٢}$
٨-أ	(١، −٢) عظمى
٨-ج	أ = ٦ ، ب = ٩ ؛ (١، ٥) عظمى ، (٣، ١) صغرى

الملحق — أسئلة كامبريدج

١	ص = ٥س + ٩
٣	أ = ٥٤ ، ب = ٢٧
٥	أ) ($-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$) ب) صغرى ج) متزايدة لأن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٤س + $\frac{١}{س^{٢}}$ > ٠
٧	أ) ك = ١٦ ب) صغرى ج) د(س) ≤ ١٤
٩	جـ = ٤ ، ل($\frac{١}{٢}$ ، −١) ؛ جـ = −١ ، ل(−٢، −١١)

٢	٣س − ٨ص + ٢ = ٠
٤	١٨
٦	أ) (١، −٦) ، (٤، ٦) ب) $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} = \frac{٧٢}{(٢س - ٥)^{٣}}$ ؛ (١، −٦) عظمى ، (٤، ٦) صغرى
٨	ك = ٣
١٠	أ) ٥(ص − ٣)^{٢} + ٥ ب) د′(س) = ٥(س^{٢} − ٣)^{٢} + ٥ > ٠ ⇐ متزايدة

الملحق — أسئلة القدرات العليا

١ أ = ٥ ، ب = ٧٤

٢ أ) ص = −س + ٥ ب) س = −١ ± $\sqrt{٢}$

٣ أ) $(\frac{١}{٤}، ٤)$ ، $(-\frac{١}{٤}، ٤)$ ب) صغرى

٤ أ) س = −٥ + ٣$\sqrt{٥}$ ب) ص = ٢٠$\sqrt{٥}$

٥ أ) ح = ٢نق + $\frac{٥٠}{\text{نق}}$

ب) نق = ٥ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ح}}{\text{ء نق}^{٢}} > ٠ \Leftarrow$ صغرى ، ح = ٢٠ سم

٦ أ) (١، ٠) ، (٢، −١) ب) رسم ج) ك < −١ أو ك > ٠

ملاحظاتي الختامية

الوحدة الرابعة: التفاضل – اكتب ما تعلّمته، وما تريد أن تسأل عنه د. صهيب.

التاريخ

✍️ ملاحظاتي

📌 لا تنسَ!

✓ مهامي ☐ / ☑

المهمة	أنجزت	لم أنجز
حل أمثلة الدروس الستة	☐	☐
حل تمارين الكتاب المختارة	☐	☐
حل الأسئلة الوزارية (٤٨ سؤالًا)	☐	☐
قراءة خلاصة الأخطاء الشائعة	☐	☐
حل أسئلة كامبريدج	☐	☐
حل أسئلة القدرات العليا	☐	☐
إتقان خطوات الآلة الحاسبة	☐	☐
مراجعة أخطائي من المفتاح	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐

مستوى إتقاني للوحدة

★ ★ ★ ★ ★